**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.**

**1.Функциональные ряды.**

**Определение 1.1.** Функциональным рядом называетсяряд

, (1.1)

где члены ряда являются функциями.

При каждом фиксированном значении аргумента функциональный ряд является числовым рядом.

При одних значениях ряд (1.1) может сходиться, а при других – расходиться.

**Пример 1.1.** Рассмотрим ряд

Это – сумма всех членов геометрической прогрессии, поскольку каждое последующее слагаемое получается из предыдущего умножением на Но тогда при таких, что , ряд сходится, и его сумма равна , а при таких, что , ряд расходится по следствию из необходимого признака сходимости ряда.

**Определение 1.2.** Множество всех тех значений при которых ряд (1.1) сходится, называется его областью сходимости.

**Определение 1.3.** Говорят, что сходящийся числовой ряд

(1.2)

мажорирует ряд (1.1) на некотором множестве , если для всех ; при этом ряд (1.1) называется мажорируемым на множестве

Введём обозначения для частичных сумм и остаточных членов рядов (1.1) и (1.2):

(1.3)

(1.4)

Обозначим через сумму ряда (1.2). Тогда

**Теорема 1.1.** Мажорируемый на некотором множестве ряд (1.1) абсолютно сходится на этом множестве.

*Доказательство.* Справедливость теоремы вытекает из первой теоремы сравнения для числовых рядов.

**Теорема 1.2.** Если мажорируемый на некотором интервале ряд (1.1) составлен из непрерывных функций, то его сумма непрерывна на этом интервале.

*Доказательство.* По теореме 1.1 ряд сходится. Имеем:

Поскольку ряд (1.2) сходится, то можно выбрать настолько большим, что для произвольного Поскольку функции непрерывны, то непрерывна и функция Тогда при всех достаточно малых по модулю значений будет выполняться неравентво , откуда следует неравенство для произвольного , что означает, непрерывность функции

**Теорема 1.3.** Если мажорируемый на некотором интервале ряд (1.1) составлен из непрерывных функций и то его можно на этом интервале почленно интегрировать:

.

*Доказательство.*

=

Покажем, что последнее слагаемое стремится к нулю при стремящемся к бесконечности. Действительно,

при стремящемся к бесконечности, в силу сходимости ряда (1.2). Тогда, устремив к бесконечности, очевидным образом получим утверждение теоремы.

**Теорема 1.4 (о почленном дифференцировании ряда).** Пусть

, .

Пусть функции дифференцируемы, и ряд мажорируем на интервале . Тогда функция дифференцируема, причём

, .

*Доказательство.* Поскольку ряд, составленный из производных, мажорируем, то по теореме 1.1 он сходится. Пусть

.

По теореме 1.3 Этот ряд можно почленно интегрировать:

*.*

Но поскольку интеграл с переменным верхним пределом является первообразной подынтегральной функции, а производная константы равна нулю, то

**2.Степенные ряды. Теорема Абеля.**

**Определение 2.1.** Степенным рядом называется функциональный ряд вида

, (2.1)

где и – заданные константы. Константы называются коэффициентами ряда. Если, то ряд называется рядом по степеням ; если же , то ряд называется рядом по степеням

Справедлива следующая

**Теорема 2.1(Абель).** 1)Если ряд (2.1) сходится в точке , то он сходится абсолютно во всех точках таких, что . 2) Если ряд (2.1) расходится в точке , то он расходится во всех точках таких, что .

*Доказательство.* Докажем пункт 1). Поскольку сходится ряд

,

то по необходимому признаку сходимости ряда его общий член стремится к нулю. Но тогда все члены ряда ограничены по модулю, то есть существует такая константа что

Пусть , то есть . Тогда

*,*

то есть ряд мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем, меньшим единицы. Следовательно, ряд абсолютно сходится.

Докажем пункт 2). Пусть таков, что . Предположим, что ряд сходится в точке . Но тогда по доказанному пункту 1) ряд должен сходиться в точке , что противоречит условию теоремы.

Из теоремы 2.1 справедливо следующее

**Следствие 2.1.** Существует называемое радиусом сходимости ряда, такое, что ряд (2.1) сходится абсолютно для всех таких, что и расходится для всех таких, что

Иными словами, ряд сходится абсолютно для и расходится для .

**Замечание 2.1**. В каждой из точек ряд может как сходиться, так и расходиться.

**Замечание 2.2.** В точке степенной ряд сходится.

Действительно, при все члены ряда, кроме, быть может, , обращаются в нуль.

**3. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда с помощью признака Даламбера.**

Покажем, как вычисляется радиус сходимости ряда (2.1) с помощью признака Даламбера.

**Теорема 3.1.** Если – радиус сходимости ряда (2.1), то

, (3.1)

если этот предел существует.

*Доказательство.* Заметим, что при ряд сходится. По теореме Абеля внутри области сходимости ряд сходится абсолютно. Рассмотрим ряд

, который является положительным при Применим к этому ряду признак Даламбера:

=.

По признаку Даламбера, чтобы ряд сходился, должно выполняться неравенство

Но тогда

Заметим, что после того, как найден радиус сходимости, а стало быть, и интервал , на котором ряд сходится абсолютно, нужно исследовать сходимость ряда в точках .

**Замечание 3.1.** Заметим, что может оказаться, что формальноусловие теоремы 3.1 о существовании предела (3.1) может быть не выполнено, но, по существу, возможно вычислить радиус сходимости, применяя признак Даламбера. Поэтому представляется целесообразным не пользоваться готовой формулой (3.1), а в каждом случае повторять выкладки, аналогичные применяемым при выводе формулы (3.1).

Поясним сказанное примером.

**Пример 3.1.** Найти область сходимости ряда

Очевидно, предел (3.1) для исследуемого ряда не существует, поскольку все коэффициенты при нечётных степенях равны нулю. Покажем, что, тем не менее, признак Даламбера применим для нахождения радиуса сходимости этого ряда.

Поскольку , то ряд является положительным при . Применим признак Даламбера. Имеем:

По признаку Даламбера ряд сходится, если откуда то есть радиус сходимости равен трём. Решая последнее неравенство, получим:

, то есть по теореме Абеля ряд сходится абсолютно на интервале (-2, 4). Заметим, что интервал симметричен относительно точки

Исследуем теперь ряд на концах интервала.

1) Пусть Тогда исследуемый ряд примет вид:

.

Получился гармонический ряд, который, как известно, расходится по интегральному признаку Коши.

2) Пусть . Тогда исследуемый ряд примет вид:

.

Опять получился гармонический ряд. Таким образом, и в точке ряд расходится. Следовательно, областью сходимости исследуемого ряда является открытый интервал (-2, 4).

**Пример 3.2.** Найти область сходимости ряда

В данном случае теорема 3.1 применима. Радиус сходимости вычисляется по формуле (3.1):

Тогда по теореме Абеля ряд сходится абсолютно для , удовлетворяющих неравенству то есть .

Исследуем сходимость ряда в граничных точках этого интервала.

1) Пусть . Тогда ряд примет вид: . Это – знакочередующийся ряд, удовлетворяющий всем условиям признака Лейбница. Следовательно, исследуемый ряд сходится в точке

2) Пусть Тогда ряд примет вид: . Получился гармонический ряд, который, как известно, расходится (был исследован нами по интегральному признаку Коши). Следовательно, в точке исследуемый ряд расходится. Таким образом, областью сходимости исследуемого ряда является полузамкнутый интервал [-4,2).

**Пример 3.3.** Найти область сходимости ряда

В данном случае тоже применима теорема 3.1. Радиус сходимости вычисляется по формуле (3.1):

Тогда по теореме Абеля ряд сходится абсолютно для , удовлетворяющих неравенству то есть .

Исследуем сходимость ряда в граничных точках этого интервала.

1) Пусть . Тогда ряд примет вид: . Это – знакочередующийся ряд; однако, его общий член не стремится к нулю, следовательно, ряд расходится по следствию из необходимого признака сходимости ряда.

2) Пусть Тогда ряд примет вид: . Получился ряд, общий член которого не стремится к нулю. Следовательно, ряд расходится по следствию из необходимого признака сходимости ряда.

Таким образом, областью сходимости исследуемого ряда является открытый интервал (-5,1).

**Пример 3.4.** Найти область сходимости ряда

В данном случае теорема 3.1 тоже применима. Радиус сходимости вычисляется по формуле (3.1):

Тогда по теореме Абеля ряд сходится абсолютно для всех , удовлетворяющих неравенству то есть .

Исследуем сходимость ряда в граничных точках этого интервала.

1) Пусть . Тогда ряд примет вид: . Сходимость этого ряда ранее была установлена по интегральному признаку Коши. Следовательно, исследуемый ряд сходится в точке

2) Пусть . Тогда ряд примет вид: . Этот ряд сходится по признаку Лейбница; более того, он сходится абсолютно, поскольку сходится ряд из пункта 1). Таким образом, исследуемый ряд сходится в точке

Следовательно, областью сходимости исследуемого ряда является замкнутый интервал [-2,0].

**Пример 3.5.** Найти область сходимости ряда

К этому ряду теорема 3.1 не применима, поскольку коэффициенты при чётных степенях ( равны нулю, и, следовательно, предел (3.1) не существует. Тем не менее, признак Даламбера к нему применим.

Поскольку по теореме Абеля внутри области сходимости ряд сходится абсолютно, то рассмотрим ряд, составленный из модулей: . Применим к нему признак Даламбера:

.

Поскольку предел равен нулю (то есть меньше единицы) при любом , то областью сходимости ряда является вся числовая ось.

**Пример 3.6.** Найти область сходимости ряда

К этому ряду теорема 3.1 применима.

.

Радиус бесконечен, следовательно, ряд сходится на всей числовой оси.

**Пример 3.7.** Найти область сходимости ряда

К этому ряду теорема 3.1тоже применима.

.

Радиус сходимости равен нулю. Но поскольку в замечании 2.2 сказано, что любой степенной ряд 2.1 в точке сходится, то исследуемый ряд сходится при , и областью сходимости исследуемого ряда является одноточечное множество {3}.

**Пример 3.8.** Найти область сходимости ряда

К этому ряду теорема 3.1 не применима, поскольку лишь каждый третий коэффициент при степенях отличен от нуля.

Применим признак Даламбера непосредственно. Поскольку по теореме Абеля внутри области сходимости ряд сходится абсолютно, то рассмотрим ряд, составленный из модулей: . Тогда

*.*

Этот предел равен нулю при , и равен бесконечности при Следовательно, ряд сходится только в одной точке

**4. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда с помощью радикального признака Коши.**

Покажем, как вычисляется радиус сходимости ряда (2.1) с помощью радикального признака Коши.

**Теорема 4.1.** Если – радиус сходимости ряда (2.1), то

, (4.1)

если этот предел существует.

*Доказательство.* Поскольку по теореме Абеля внутри области сходимости ряд сходится абсолютно, то рассмотрим ряд, составленный из модулей:

. Применим к этому ряду радикальный признак Коши:

.

По радикальному признаку Коши ряд сходится, если

То есть ряд сходится для значений , удовлетворяющих неравенству

*.*

Напомним, что в граничных точках интервала ( нужно исследовать ряд на сходимость.

Заметим, что как при вычислении радиуса сходимости с помощью признака Даламбера, условие теоремы 4.1 формально может быть не выполнено, но метод вычисления радиуса сходимости с помощью радикального признака Коши по существу может оказаться применимым.

**Пример 4.1.** Найти область сходимости ряда .

Для этого ряда условие теоремы 4.1 выполнено. Тогда радиус сходимости вычисляется по формуле:

Тогда ряд сходится, если , то есть для таких, что .

Исследуем сходимость ряда в граничных точках этого интервала.

1) Пусть Тогда ряд имеет вид: .

Докажем, что общий член ряда не стремится к нулю. Действительно,

. Но тогда

(Здесь мы использовали, что ). Но тогда ряд в точке расходится по следствию из необходимого признака.

2) Пусть теперь Тогда ряд примет вид:

. Но, как только что доказано, Следовательно, и в точке ряд расходится.

Таким образом, областью сходимости исследуемого ряда является открытый интервал (

**Пример 4.2.** Найти область сходимости ряда .

Для этого ряда теорема 4.1 не применима, так как не выполнено её условие. Поэтому нужно применить радикальный признак Коши непосредственно. Предоставим это сделать самостоятельно.

**5.Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.**

**Теорема 5.1.** Пусть  для . Тогда для всех , справедливо равенство

*Доказательство.* Пусть для произвольного сколь угодно малого положительного . Поскольку по теореме Абеля внутри области сходимости ряд сходится абсолютно, то для всех сходится ряд , причём на интервале ряд мажорируем рядом . Тогда по теореме 1.3 ряд можно почленно интегрировать на интервале , а в силу произвольности - и на интервале .

**Теорема 5.2.** Пусть  для . Тогда функция дифференцируема на интервале и для всех справедливо равенство

=.

*Доказательство.* Пусть, как и в теореме 5.1, для произвольного сколь угодно малого положительного . Поскольку по теореме Абеля внутри области сходимости ряд сходится абсолютно, то для всех сходится ряд , причём на интервале ряд мажорируем рядом . Поскольку последний ряд сходится, то по необходимому признаку сходимости ряда . Из этого следует, что существует такое , что

. (5.1)

Покажем, что из этого следует сходимость ряда , где - произвольное положительное число, меньшее и сколь угодно близкое к .

В силу (5.1) имеем: , где , причём , поскольку Покажем, что ряд сходится. Применим к этому ряду признак Даламбера. Действительно

, из чего следует сходимость ряда.

Но тогда ряд сходится по первой теореме сравнения, и он мажорирует на интервале ряд (Заметим, что и ряд мажорирует ряд .).Тогда из теоремы 1.4 и произвольной близости и к следует утверждение теоремы.

**Замечание 5.1.** Аналогичным образом можно доказать, что степенной ряд можно в области сходимости почленно дифференцировать сколько угодно раз.

**6. Ряды Маклорена и Тейлора.**

Пусть функция раз дифференцируема в окрестности точки . С одной стороны, имеем:

Отсюда получим:

(6.1)

Теперь, интегрируя по частям, получим:

(6.2).

Заметим, что поскольку дифференциалы в интегралах берутся по переменной , то

Из (6.1) и (6.2) получим:

(6.3)

Ещё раз применим формулу интегрирования по частям:

(6.4)

Из (6.3) и (6.4) получим:

(6.5)

При осуществим аналогичные преобразования интегралов:

*.*

Последовательно применяя приведённые выше преобразования, из (6.5) получим:

+…+. (6.6)

Равенство (6.6) называется формулой Маклорена. Последнее слагаемое

называется остаточным членом формулы Маклорена. Применив теорему о среднем, можно остаточный член представить в виде

, (6.7)

Если функция бесконечно дифференцируема в окрестности точки и при этом , то из формулы Маклорена следует ряд Маклорена

+…+, (6.8)

или

*.*

Ряд Маклорена – это степенной ряд по степеням

Формула Маклорена и ряд Маклорена являются частными случаями соответственно формулы Тейлора и ряда Тейлора.

Формула Тейлора и ряд Тейлора могут быть получены из формулы Маклорена и ряда Маклорена следующим образом.

Пусть функция раз дифференцируема в окрестности точки .

Введём новую переменную и новую функцию

. Очевидно, функция будет раз дифференцируема в окрестности точки Запишем для неё формулу Маклорена, а затем сделаем обратные замены переменной и функции. Тогда получим формулу Тейлора:

…

где

=,

Этот вид остаточного члена называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Приведём ещё один вывод формулы Тейлора.

Положим для краткости

….

Этот полином называется полиномом Тейлора функции , которая предполагается, как и выше, раз дифференцируемой в окрестности точки . Очевидно, что

.

Положим , то есть

В силу сказанного выше,

.

Положим . Очевидно,

*.*

Применяя последовательно к отношению функций и и отношениям их производных теорему Коши о дифференцируемых функциях, получим:

,

где - некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам

, если , и

, если .

Из равенства в силу определения функции для остаточного члена получим: .

Поскольку число можно представить в виде с некоторым , удовлетворяющим неравенству , то остаточный член получим в том же виде, что и выше.

Если функция бесконечно дифференцируема в окрестности точки и при этом , то из формулы Тейлора следует ряд Тейлора

…

,

или

*.*

Справедлива следующая

**Теорема 6.1.** Любой степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

*Доказательство.* Пусть

.

Положив , получим, что .

Заметим, что по доказанному выше степенной ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

Почленно продифференцируем ряд:

*.*

Положив , получим, что .

Ещё раз продифференцируем ряд:

*.*

Положив , получим, что .

Ещё раз продифференцируем ряд:

*.*

Положив , получим, что .

Продолжая этот процесс, для всех получим, что

Приведём ряды Маклорена для некоторых элементарных функций.

(6.9)

(6.10)

Эти ряды представляют собой сумму всех членов геометрической прогрессии. Первый из них уже упоминался выше, а второй из первого получается заменой . Очевидно, оба сходятся, когда выполнено неравенство

Запишем формулу Маклорена для экспоненты. Поскольку производные всех порядков в нуле равны единице, то получим:

где , .

Докажем, что при любом . Для этого рассмотрим ряд Исследуем его по признаку Даламбера. Пусть Тогда имеем:

Аналогичным образом рассмотрим случай, когда

Следовательно, ряд сходится при всех Но тогда по необходимому признаку сходимости ряда его общий член стремится к нулю. Устремив к бесконечности, из формулы Маклорена получим ряд Маклорена для экспоненты:

, . (6.11)

Выведем ряд Маклорена для синуса.

Поскольку для производных синуса справедливы равенства

, , то

В силу ограниченности синуса и косинуса остаточный член в формуле Маклорена для синуса удовлетворяет неравенству .

Применяя признак Даламбера легко доказать , что ряд сходится при всех , откуда будет следовать, что Тогда получим ряд Маклорена для синуса:

, (6.12)

Аналогичным образом можно получить ряд Маклорена для косинуса:

, (6.13)

Запишем равенство (6.10) в виде

.

Проинтегрировав от 0 до , получим ряд Маклорена для функции

:

. (6.14)

Заметим без доказательства, что равенство (6.14) имеет место и при То есть

.

Положим в равенстве (6.10) :

Проинтегрировав от 0 до , получим ряд Маклорена для функции :

(6.15)

Выведем теперь биномиальный ряд – ряд Маклорена для функции

.

Ряд называется биномиальным, поскольку при натуральном функция раскладывается в многочлен степени по формуле бинома Ньютона. При ненатуральном она раскладывается в бесконечный ряд.

Поскольку оценка остаточного члена формулы Маклорена этой функции довольно сложна. То мы разложим её в степенной ряд иначе.

Заметим, что . Тогда функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

, причём (6.16)

Заметим, что задача Коши имеет единственное решение. Поэтому если сумма какого-либо ряда является решением задачи (6.16), то она будет равна функции

Будем искать разложение функции в ряд в следующем виде:

*.* (6.17)

Тогда

.

В силу (6.16)

,

причём Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

.

Приравнивая коэффициенты при равными степенями, получим:

;

;

…………………………………………………….

.

Подставляя найденные коэффициенты в правую часть равенства (6.17),

получим:

*.* (6.18)

Вычислим радиус сходимости этого ряда. Имеем:

таким образом, ряд (6.18) сходится, если

**7.Приближённые вычисления с помощью рядов.**

**Пример 7.1.** Вычислитьзначение с точностью

*Решение.* Положим в (6.13) :

.

Это – знакочередующийся ряд. Вычислим слагаемые ряда до первого, меньшего по абсолютной величине, чем Имеем: , , , . Тогда по признаку Лейбница с заданной точностью получим:

**Пример 7.2.** Вычислить интеграл с точностью

*Решение.* Положим в (6.11) :

.

Проинтегрируем этот ряд почленно от

Поскольку ряд является знакочередующимся, то начиная с последнего выписанного слагаемого, сумма остатка ряда по признаку Лейбница по модулю меньше , чем . Следовательно, с заданной точностью интеграл равен:

**8.Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.**

Покажем, как с помощью степенных рядов можно приближённо решать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим задачу Коши

(8,1)

Будем считать, что функция бесконечно дифференцируема по обеим переменным.

Будем искать решение задачи (8,1) в виде ряда

(8.2)

Положив в (8.2) , из начального условия (8,1) получим, что

Продифференцируем равенство (8,2):

*.* (8.3)

Положив в (8,1) и (8.3) , получим, что .

Продифференцировав уравнение (8.1) и равенство (8.3), получим:

, (8.4)

(8.5)

Положив в (8.4) и (8.5) , получим:

, то есть .

Продолжая дифференцировать равенства (8.4) и (8.5) и полагая

последовательно определим коэффициенты ряда.